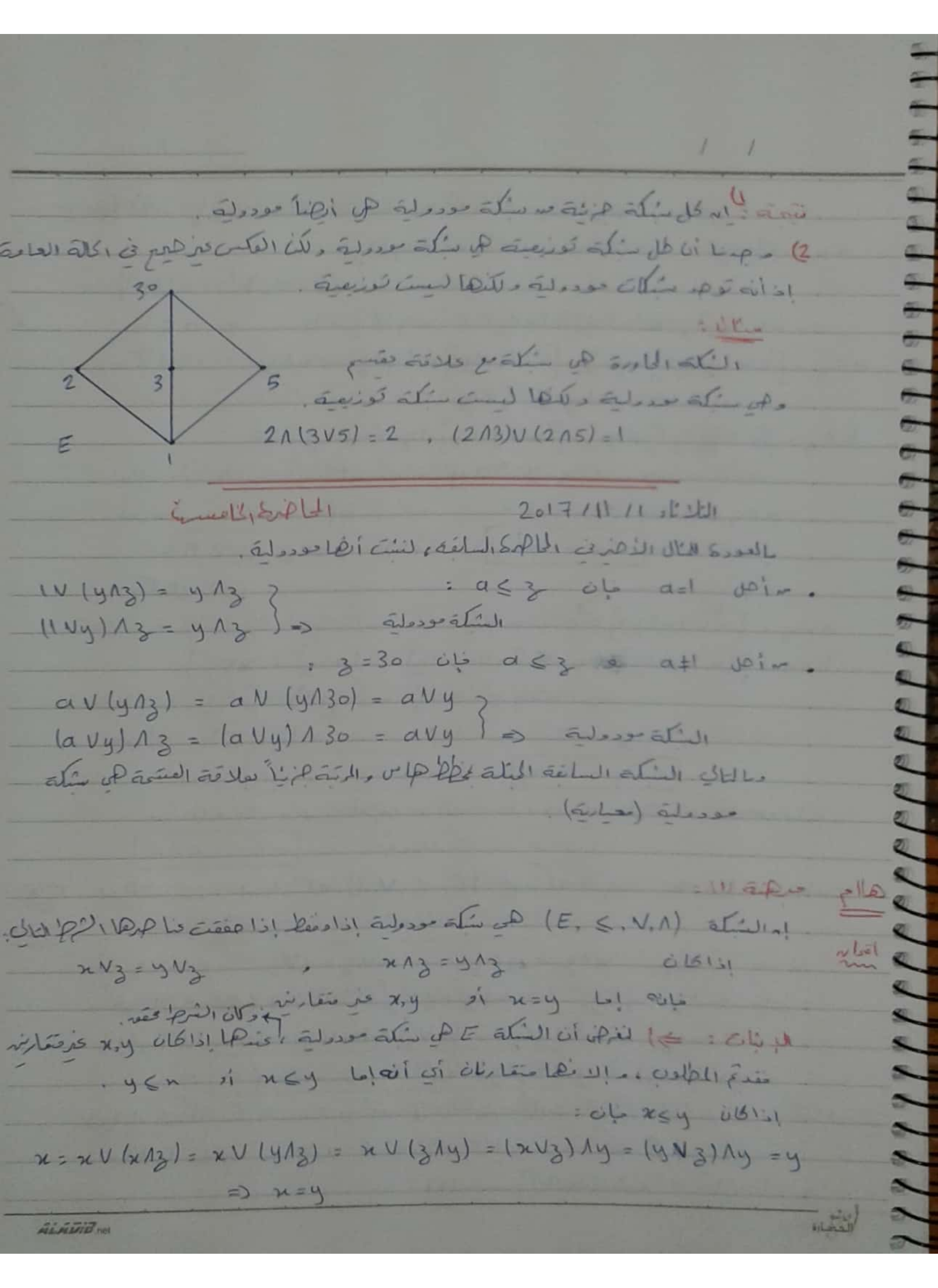


نتيجة 1: إن كل شبكة جزئية من شبكة مودولية هي أيضاً مودولية.

2) وجدنا أن كل شبكة توزيعية هي شبكة مودولية، لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة إذ أنه توجد شبكات مودولية ولكنها ليست توزيعية.

مثال:

الشكل المجاورة هي شبكة مع علاقة تقسيم وهي شبكة مودولية ولكنها ليست شبكة توزيعية.

$2\wedge(3\vee 5)=2$, $(2\wedge 3)\vee(2\wedge 5)=1$

الثلاثاء 11/11/2017 — المحاضرة الخامسة

بالعودة للمثال الأخير في المحاضرة السابقة، لنثبت أنها مودولية.

- من أجل $a=1$ فإن $a\le z$:

$1\vee(y\wedge z)=y\wedge z$

$(1\vee y)\wedge z=y\wedge z$ ⇐ الشبكة مودولية

- من أجل $a\neq 1$ و $a\le z$ فإن $z=30$:

$a\vee(y\wedge z)=a\vee(y\wedge 30)=a\vee y$

$(a\vee y)\wedge z=(a\vee y)\wedge 30=a\vee y$ ⇐ الشبكة مودولية

وبالتالي الشكل السابقة الممثلة بمخطط هاس، المرتبة جزئياً بعلاقة القسمة هي شبكة مودولية (معيارية).

مبرهنة 1: هام

إن الشبكة $(E,\le,\vee,\wedge)$ هي شبكة مودولية إذا وفقط إذا حققت عناصرها الشرط التالي:

إذا كان $x\wedge z=y\wedge z$, $x\vee z=y\vee z$

فإنه إما $x=y$ أو x,y غير متقارنين ← وكان الشرط محقق.

الإثبات: ⇐) لنفرض أن الشكل E هي شبكة مودولية، عندها إذا كان x,y غير متقارنين فنحقق المطلوب، وإلا فإنهما متقارنان أي أنه إما $x\le y$ أو $y\le x$.

إذا كان $x\le y$ فإن:

$x=x\vee(x\wedge z)=x\vee(y\wedge z)=x\vee(z\wedge y)=(x\vee z)\wedge y=(y\vee z)\wedge y=y$

$\Rightarrow x=y$

/ /

⇐) لتكن x, y, z عناصر اختيارية من الشبكة E بحيث $x \leq z$ ولنضع:

$a = x \vee (y \wedge z)$. $b = (x \vee y) \wedge z$

نلاحظ أن $a \leq b$ لأن:

$a = x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z = b \Rightarrow a \leq b$

كما أن:
$a \wedge y = [x \vee (y \wedge z)] \wedge y \geqslant [x \vee (y \wedge z)] \wedge (y \wedge z) = y \wedge z$

$\Rightarrow a \wedge y \geqslant y \wedge z$

$b \wedge y = [(x \vee y) \wedge z] \wedge y = [(x \vee y) \wedge y] \wedge z = y \wedge z$

$\Rightarrow a \wedge y \geqslant b \wedge y$ --- (P)

وبما أن $a \leq b$ فإن $a \wedge y \leq b \wedge y$ --- (U)

من (P) و (U) نجد أن: $\boxed{a \wedge y = b \wedge y}$ --- (1)

وكذلك فإن:

$a \vee y = [x \vee (y \wedge z)] \vee y = x \vee y$
$b \vee y = [(x \vee y) \wedge z] \vee y \leq [(x \vee y) \wedge z] \vee (x \vee y) = x \vee y$

$\Rightarrow b \vee y \leq a \vee y$ --- (P')

وبما أن $a \leq b$ فإن $b \vee y \geqslant a \vee y$ --- (U')

من (P') و (U') نجد أن $\boxed{a \vee y = b \vee y}$ --- (2)

من (1) و (2) وحسب الفرض نجد أن $a = b$ ، وبالتالي الشبكة مودولية

مبرهنة (2): إن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة توزيعية إذا وفقط إذا حققت عناصر الشرط التالي:

إذا كان $x \vee z = y \vee z$ ، $x \wedge z = y \wedge z$ فإن $x = y$

البرهان: ⇐) إذا كان $x \vee z = y \vee z$ و $x \wedge z = y \wedge z$ فإن:

$x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) =$

$= y \vee (x \wedge z) = y \vee (y \wedge z) = y \Rightarrow x = y$

⇒) إن الشبكة E السابقة مع تحقق هذا الشرط تكون حسب المبرهنة (1) شبكة مودولية

ولتكن العناصر a, b, c ثلاثة عناصر اختيارية من الشبكة E . ولنضع:

$x = (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)]$ ---(1)

$y = (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)]$ --- (2)

وبما أن $(a \wedge b) \leq (a \vee b)$ فإن :

$x = [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b)$ --- (*)

وأيضاً بما أن $(b \wedge c) \leq (b \vee c)$ فإن :

$y = [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c)$ --- (**)

ومنه نجد من (*) : $x \wedge b = [(a \wedge b) \vee c] \wedge b = (a \wedge b) \vee (c \wedge b)$

لأن $a \wedge b \leq b$ والشبكة مودولية

وأيضاً نجد من (**) : $y \wedge b = [(b \wedge c) \vee a] \wedge b = (b \wedge c) \vee (a \wedge b)$

لأن الشبكة مودولية و $b \wedge c \leq b$

من المساواتين السابقتين نجد أن : $x \wedge b = y \wedge b$ --- (1')

كذلك :

$x \vee b = b \vee [c \wedge (a \vee b)] = (b \vee c) \wedge (a \vee b)$

$y \vee b = b \vee [a \wedge (b \vee c)] = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$

من المساواتين السابقتين نجد أن :

$x \vee b = y \vee b$ --- (2')

من (1') و (2') نجد أن :

$x = y$ ومنه $x \wedge a = y \wedge a$

وبما أنه حسب (*) يكون :

$x \wedge a = [(a \wedge b) \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$= \Big($ $y \wedge a = a \wedge [a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c)$

$\Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ومنه الشبكة توزيعية.

/ /

3- الشبكات المتممة: في هذا النوع من الشبكات يجب أن تحتوي على عنصرين هامين هما العنصر الأكبر والذي نرمز له بالرمز 1 والعنصر الأصغر والذي نرمز له بالرمز 0.

تعريف: لتكن $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة ما، تحتوي على العنصرين 0,1 ، ولكن x عنصر من E عندئذٍ نقول عن العنصر $x' \in E$ أنه متمم للعنصر x إذا حقق الشرطين التاليين:

$$x \vee x' = 1 \quad , \quad x \wedge x' = 0$$

مثال1: $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cup, \cap)$ العنصر الأكبر والأصغر موجودان. $1 = E$, $0 = \Phi$

إن متمم $A \in \mathcal{P}(E)$ هو $B = E \setminus A$

مثال2: لنتأمل الشبكة الممثلة بمخطط هاس التالي:

العنصر	المتممات
d	c, a
a	b, d, e, f

نتيجة: إن كل شبكة تحتوي العنصرين 0,1 ، يكون متمم 0 هو 1 ومتمم 1 هو 0. وإذا كان x' متمماً للعنصر x فإن x متمم العنصر x'.

تعريف شبكة المتممات: نسمي الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة متممات أو شبكة متممة إذا كانت تحتوي على العنصرين 0,1 وكان لكل عنصر من عناصرها متمم واحد على الأقل.

مثال1: إن شبكة المجموعات الجزئية $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cup, \cap)$ هي شبكة متممات، ولكل عنصر متمم واحد فقط.

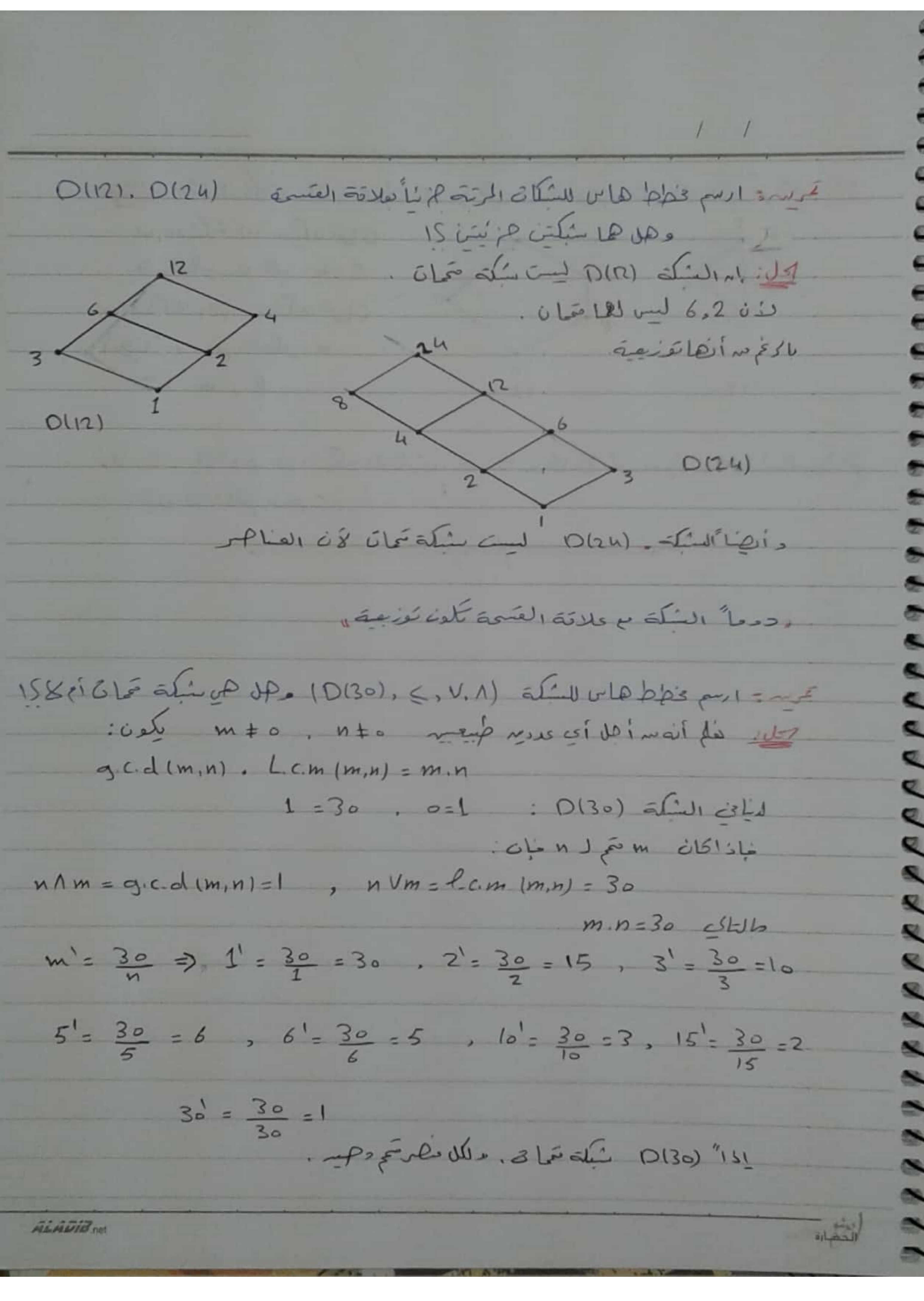
مثال2: إن الشبكة $D(6)$ هي شبكة متممات، ولكل عنصر من عناصرها متمم وحيد. ويكون $0 = 1$, $1 = 6$

$(D(6), \leq, \vee, \wedge)$

متمم 3 هو 2 ومتمم 2 هو 3.

مثال3: هل الشبكة الممثلة بمخطط هاس هي شبكة متممات؟

ليست شبكة متممات، لأنه يوجد على الأقل عنصر واحد وهو a ليس له متمم. وأيضاً b و c ليس لهما متمم.



/ /

تمرين: ارسم مخطط هاس للشبكات المرتبة جزئياً بعلاقة القسمة $D(12), D(24)$
وهل هما شبكتين جزئيتين ؟!

الحل: إن الشبكة $D(12)$ ليست شبكة متممة.
لأن $6, 2$ ليس لها متمم.
بالرغم من أنها توزيعية

وأيضاً الشبكة $D(24)$ ليست شبكة متممة لأن العناصر

«دوماً الشبكة مع علاقة القسمة تكون توزيعية»

تمرين: ارسم مخطط هاس للشبكة $(D(30), \leq, \vee, \wedge)$ وهل هي شبكة متممة أم لا؟!

الحل: نعلم أنه من أجل أي عددين طبيعيين $n \neq 0$ ، $m \neq 0$ يكون:

$$g.c.d(m,n) \cdot L.c.m(m,n) = m \cdot n$$

لدينا في الشبكة $D(30)$: $0 = 1$ ، $1 = 30$

فإذا كان m متمم لـ n فإن:

$$n \wedge m = g.c.d(m,n) = 1 \quad , \quad n \vee m = l.c.m(m,n) = 30$$

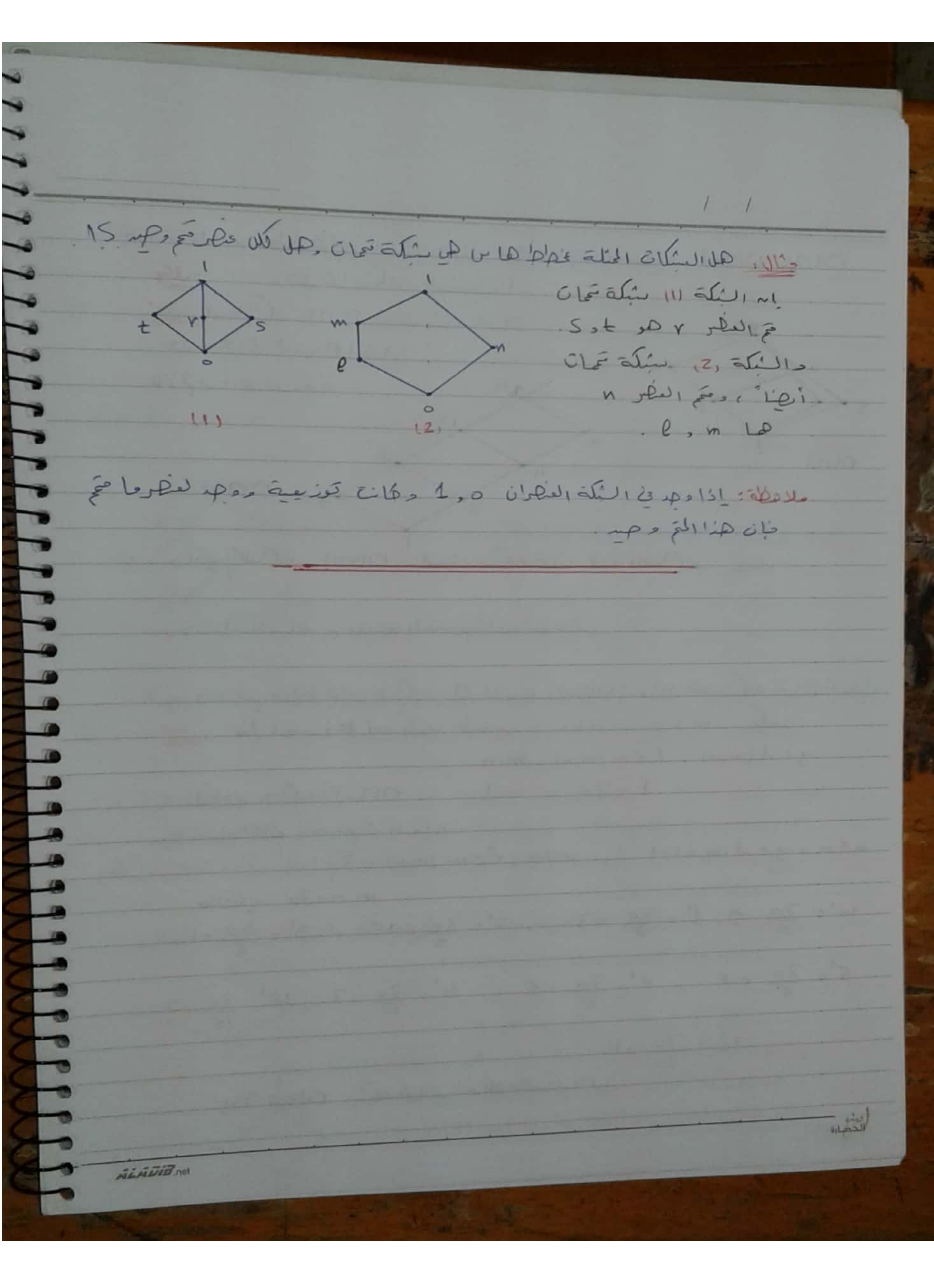
وبالتالي $m \cdot n = 30$

$$m' = \frac{30}{n} \Rightarrow 1' = \frac{30}{1} = 30 \quad , \quad 2' = \frac{30}{2} = 15 \quad , \quad 3' = \frac{30}{3} = 10$$

$$5' = \frac{30}{5} = 6 \quad , \quad 6' = \frac{30}{6} = 5 \quad , \quad 10' = \frac{30}{10} = 3 \quad , \quad 15' = \frac{30}{15} = 2$$

$$30' = \frac{30}{30} = 1$$

إذاً $D(30)$ شبكة متممة، ولكل عنصر متمم وحيد.



مثال: هل الشبكات الممثلة بمخطط هاس هي شبكة تممات، هل لكل عنصر متمم وحيد. ؟

إن الشبكة (1) شبكة تممات
متمم العنصر r هو t و s.
والشبكة (2) شبكة تممات
أيضاً، ومتمم العنصر n
هما m , l.

ملاحظة: إذا وجد في الشبكة العنصران 0 , 1 وكانت توزيعية ووجد لعنصر ما متمم
فإن هذا المتمم وحيد.